ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО

ПО ТЕХНИЧЕСКОМУ РЕГУЛИРОВАНИЮ И МЕТРОЛОГИИ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ СТАНДАРТ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ГОСТ Р 54521 — 2011

Статистические методы

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СИМВОЛЫ И ЗНАКИ ДЛЯ ПРИМЕНЕНИЯ В СТАНДАРТАХ

Издание официальное

Москва
Стандартинформ
2012

Предисловие

Цели и принципы стандартизации в Российской Федерации установлены Федеральным законом от 27 декабря 2002 г. № 184-ФЗ «О техническом регулировании», а правила применения национальных стандартов Российской Федерации — ГОСТ Р 1.0—2004 «Стандартизация в Российской Федерации. Основные положения»

Сведения о стандарте

1 ПОДГОТОВЛЕН Автономной некоммерческой организацией «Научно-исследовательский центр контроля и диагностики технических систем» (АНО «НИЦ КД») на основе собственного аутентичного перевода на русский язык стандарта, указанного в пункте 4

2 ВНЕСЕН Техническим комитетом по стандартизации ТК 125 «Статистические методы в управлении качеством продукции»

3 УТВЕРЖДЕН И ВВЕДЕН В ДЕЙСТВИЕ Приказом Федерального агентства по техническому регулированию и метрологии от 24 ноября 2011 г. № 595-ст

4 Настоящий стандарт разработан с учетом основных требований международного стандарта ИСО 80000-2:2009 «Величины и единицы. Часть 2. Математические символы и знаки для применения в естественных науках и технологиях» (ISO 80000-2:2009 «Quantities and units — Part 2: Mathematical signs and symbols to be used in the natural sciences and technology»)

5 ВВЕДЕН ВПЕРВЫЕ

Информация об изменениях к настоящему стандарту публикуется в ежегодно издаваемом информационном указателе «Национальные стандарты», а текст изменений и поправок — в ежемесячно издаваемых информационных указателях «Национальные стандарты». В случае пересмотра (замены) или отмены настоящего стандарта соответствующее уведомление будет опубликовано в ежемесячно издаваемом информационном указателе «Национальные стандарты». Соответствующая информация, уведомление и тексты размещаются также в информационной системе общего пользования — на официальном сайте Федерального агентства по техническому регулированию и метрологии в сети Интернет

Содержание

Введение

Описание знаков, символов, выражений в настоящем стандарте приведено в форме таблиц (таблицы 4.1 — 19.1), структура которых, за исключением таблицы 16.1, одинакова.

В первой колонке этих таблиц приведен номер знака, символа, выражения.

Во второй колонке таблицы («Знак, символ, выражение») приведено изображение рассматриваемых знака, символа, выражения. Если более одного знака, символа или выражения приведено для одного объекта, они являются одинаково применимыми и эквивалентными.

В некоторых случаях рекомендуется применять единственное выражение.

В третьей колонке таблицы («Значение, устный эквивалент») приведено описание значения объекта и его устный эквивалент. Значение приведено для идентификации соответствующего понятия и не является полным математическим определением.

В четвертой колонке таблицы («Примечания, примеры») приведена полезная дополнительная информация. Приведенные определения являются достаточно краткими. Определения с математической точки зрения не являются полными.

Структура таблицы 16.1 несколько иная.

НАЦИОНАЛЬНЫЙ СТАНДАРТ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Статистические методы

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СИМВОЛЫ И ЗНАКИ ДЛЯ ПРИМЕНЕНИЯ В СТАНДАРТАХ

Statistical methods. Mathematical symbols and signs to be used in the standards

Дата введения — 2012—12—01

1 Область применения

В стандарте приведены общие сведения о математических символах и знаках, их значениях, устных эквивалентах и применении.

Рекомендуемые в стандарте символы и знаки предназначены главным образом для использования в стандартах, но могут быть использованы также и в других областях. Приведенные в настоящем стандарте математические символы соответствуют требованиям ИСО 80000-2 [1], ГОСТ 1.5.

2 Нормативные ссылки

В настоящем стандарте использована нормативная ссылка на следующий стандарт:

ГОСТ 1.5—2001 Межгосударственная система стандартизации. Стандарты межгосударственные, правила и рекомендации по межгосударственной стандартизации. Общие требования к построению, изложению, оформлению, содержанию и обозначению

3 Переменные, функции и операторы

Переменные, такие как x, y, и т. д., и индексы, такие как i в $\Sigma_i x_i$, следует изображать курсивом. Параметры, такие как a, b, и т. д., рассматриваемые в контексте как постоянные, изображают курсивом. То же относится ко всем функциям, например f, g.

Четко определенные функции независимо от контекста изображают без наклона (вертикально), например sin, exp, ln, Г. Математические константы изображают без наклона (вертикально), например $\mathrm{e} = 2{,}718\,218\,8\ \ldots$; $\pi = 3{,}141\,592\ \ldots$; $i^2 = -1$. Четко определенные операторы также изображают без наклона (вертикально), например div, δ в δ_x и d в $\mathrm{d}f/\mathrm{d}x$.

Числа, представленные цифрами, всегда изображают прямым шрифтом (вертикально), например 351 204; 1,32; 7/8.

Аргумент функции указывают в круглых скобках после символа функции без пробела между символом функции и первой круглой скобкой, например $f(x)$, $\cos(\omega t + \varphi)$. Если символ функции состоит из двух или большего количества букв, а аргумент не содержит символа операции (+, –, ×, или /), круглые скобки вокруг аргумента могут быть опущены. В этих случаях должен быть небольшой пробел между символом функции и аргументом, например int 2,4; $\sin n\pi$; arcosh $2A$; Ei x.

Если существует возможность ошибки, необходимо использовать круглые скобки. Например, $\cos x + y$ лучше записать в виде $\cos(x) + y$, чтобы исключить ошибочное понимание этой формулы.

Издание официальное

Запятая, точка с запятой или другой соответствующий символ могут быть использованы для разделения чисел или выражений. Предпочтительно использование запятой, кроме тех случаев, когда ее используют при записи десятичных дробей.

Если выражение или уравнение должно быть записано в две или более строк, следует применять правила, установленные в ГОСТ 1.5.

По возможности разрыв формулы не следует использовать внутри выражения в круглых скобках.

Общепринято использование различных букв (греческого, латинского или других алфавитов) для различных объектов. Это делает формулы более удобными и помогает в восприятии соответствующего текста. При использовании нескольких шрифтов необходимо приводить соответствующие пояснения (при необходимости).

4 Математическая логика

Знаки, символы, выражения, используемые в математической логике, приведены в таблице 4.1.

Таблица 4.1 — Знаки, символы, выражения, используемые в математической логике

Номер знака, символа, выражения	Знак, символ, выражение	Значение и устный эквивалент	Примечания, примеры
4.1	$p \wedge q$	Конъюнкция p и q, p и q	—
4.2	$p \vee q$	Дизъюнкция p и q, p или q	Выражение $p \vee q$ является истинным, если истинно p или q или оба
4.3	$\neg p$	Отрицание p, не p	В качестве эквивалентного может быть использовано обозначение $\overline{p}$. В математике аналогичное обозначение используют также для обозначения выборочного среднего (см. 9.12) и комплексно сопряженного числа (см. 14.6)
4.4	$p \Rightarrow q$	p включает q, если p, то q	$q \Leftarrow p$ имеет то же значение, что и $p \Rightarrow q$. $\Rightarrow$ символ включения
4.5	$p \Leftrightarrow q$	p эквивалентно q	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ имеет то же значение, что и $p \Leftrightarrow q$. $\Leftrightarrow$ символ эквивалентности
4.6	$\forall x \in A\ p(x)$	Для каждого x, принадлежащего множеству A, высказывание $p(x)$ истинно	Если из контекста ясно, что представляет собой множество A, выражение $\forall x\ p(x)$ может быть использовано. $\forall$ — квантор общности. Для $x \in A$ см. 5.1
4.7	$\exists x \in A\ p(x)$	Существует x, принадлежащий множеству A, для которого $p(x)$ истинно	Может быть использовано выражение $\exists x\ p(x)$, если из контекста ясно, что представляет собой множество A. $\exists$ — квантор существования. Для $x \in A$, см 5.1. Выражение $\exists^1 x\ p(x)$ означает, что существует только один элемент, для которого $p(x)$ истинно. Выражение $\exists!$ используют как эквивалент $\exists^1$

5 Множества

Знаки, символы, выражения, используемые в теории подмножеств, приведены в таблице 5.1.

Таблица 5.1 — Знаки, символы, выражения, используемые в теории подмножеств

Номер знака, символа, выражения	Знак, символ, выражение	Значение и устный эквивалент	Примечания, примеры
5.1	$x \in A$	x принадлежит A. x является элементом множества A	Выражение $A \ni x$ имеет тот же смысл, что и $x \in A$
5.2	$y \notin A$	y не принадлежит A. y не является элементом множества A	Выражение $A \not\ni y$ имеет то же смысл, что и $y \notin A$. Знак отрицания может также быть вертикальным
5.3	$\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$	Совокупность элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n$	Эквивалентным является выражение $\{x_i \mid i \notin I\}$, где I — совокупность индексов
5.4	$\{x \in A \mid p(x)\}$	Количество элементов множества A, для которых $p(x)$ истинно	Пример — $\{x \in \mathbf{R} \mid x \leq 5\}$. В качестве эквивалентного выражения может быть использовано выражение $\{x \mid p(x)\}$, если из контекста ясно, что представляет собой множество A. Например, $\{x \mid x \leq 5\}$, если ясно, что x — действительное число
5.5	card A $\lvert A\rvert$	Количество элементов множества A. Мощность множества A	Мощность множества может быть бесконечной (см. 9.16) Примеры — $\lvert A\rvert = \aleph$; $\lvert B\rvert = \aleph$, где A — множество целых чисел, B — множество вещественных чисел, $\aleph$ — мощность бесконечного множества
5.6	$\varnothing$	Пустое множество	—
5.7	$B \subseteq A$	Множество B принадлежит множеству A. B является подмножеством A	Каждый элемент множества B принадлежит множеству A. Выражение $A \supseteq B$ имеет тот же смысл, что и $B \subseteq A$
5.8	$B \subset A$	B целиком принадлежит множеству A. B — собственное подмножество множества A	Каждый элемент множества B принадлежит множеству A, но существует по крайней мере один элемент множества A, не принадлежащий множеству B. Выражение $A \supset B$ имеет тот же смысл, что и $B \subset A$
5.9	$A \cup B$	Объединение множеств A и B	Множество, содержащее все элементы множеств A и B. $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$
5.10	$A \cap B$	Пересечение множеств A и B	Множество, содержащее элементы, принадлежащие одновременно множеству A и множеству B. $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

Окончание таблицы 5.1

Номер знака, символа, выражения	Знак, символ, выражение	Значение и устный эквивалент	Примечания, примеры
5.11	$\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$	Объединение множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$	Множество, элементы которого принадлежат хотя бы одному из множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$. В качестве эквивалентных могут быть использованы знаки $\bigcup_{i=1}^{n}$, $\bigcup\limits_{i \in I}$ и $\bigcup_{i \in I}$, где I — множество индексов
5.12	$\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$	Пересечение множеств $A_1, \ldots, A_n$	Множество, элементы которого принадлежат одновременно всем множествам $A_1, A_2, \ldots, A_n$. В качестве эквивалентных могут быть использованы знаки $\bigcap_{i=1}^{n}$, $\bigcap\limits_{i \in I}$ и $\bigcap_{i \in I}$, где I — множество индексов
5.13	$A \backslash B$	Разность множеств A и B, A минус B	Множество, элементы которого принадлежат множеству A, но не принадлежат множеству B. $A \backslash B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$. Не следует использовать выражение $A - B$. Иногда в качестве эквивалентного используют выражение $\complement_A B$. Главным образом его применяют когда B — подмножество множества A. Символ A может быть опущен, если из контекста ясно, что представляет собой множество A
5.14	(a, b)	Упорядоченная пара a, b, пара a, b	$(a, b) = (c, d)$ тогда и только тогда $a = c$ и $b = d$. В качестве разделительного знака могут быть использованы точка с запятой (;) или знак (|)
5.15	$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$	Упорядоченный n-кортеж	См. замечание к 5.14
5.16	$A \times B$	Декартово произведение множеств A и B	Множество упорядоченных пар (a, b), таких, что $a \in A$ и $b \in B$. $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$
5.17	$\prod\limits_{i=1}^{n} A_i$ $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$	Декартово произведение множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$	Множество упорядоченных n-кортежей $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, таких, что $x_1 \in A_1$, $x_2 \in A_2$, ..., $x_n \in A_n$. $A \times A \times \ldots \times A$ обозначают A^n, где n — количество сомножителей в произведении
5.18	id_A	Отношение идентичности на A. Диагональ $A \times A$	id_A есть множество всех пар (x, x), где $x \in A$. Символ A может быть опущен, если из контекста понятно, что представляет собой множество A

6 Стандартные множества чисел и интервалы

Знаки, символы, выражения, используемые для стандартных множеств чисел и интервалов, приведены в таблице 6.1.

Таблица 6.1 — Знаки, символы, выражения, используемые для стандартных множеств чисел и интервалов

Номер знака, символа, выражения	Знак, символ, выражение	Значение и устный эквивалент	Примечания, примеры
6.1	**N**	Множество всех натуральных чисел. Множество, элементами которого являются все положительные целые числа и нуль	$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, $\mathbf{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Другие ограничения могут быть указаны очевидным способом, как показано ниже. $\mathbf{N}_{>5} = \{n \in \mathbf{N} \mid n > 5\}$
6.2	**Z**	Множество целых чисел	$\mathbf{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$, $\mathbf{Z}^* = \{n \in \mathbf{Z} \mid n \neq 0\}$. Другие ограничения могут быть указаны очевидным способом, как показано ниже. $\mathbf{Z}_{\geq -3} = \{n \in \mathbf{Z} \mid n \geq -3\}$
6.3	**Q**	Множество рациональных чисел	$\mathbf{Q}^* = \{r \in \mathbf{Q} \mid r \neq 0\}$. Другие ограничения могут быть указаны очевидным способом, как показано ниже. $\mathbf{Q}_{<0} = \{r \in \mathbf{Q} \mid r < 0\}$
6.4	**R**	Множество действительных чисел	$\mathbf{R}^* = \{x \in \mathbf{R} \mid x \neq 0\}$. Другие ограничения могут быть указаны очевидным способом, как показано ниже. $\mathbf{R}_{\geq 0} = \{x \in \mathbf{R} \mid x \geq 0\}$
6.5	**C**	Множество комплексных чисел	$\mathbf{C}^* = \{z \in \mathbf{C} \mid z \neq 0\}$
6.6	**P**	Множество простых чисел	$\mathbf{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots\}$
6.7	$[a, b]$	Закрытый интервал от a до b с включением конечных точек a и b	$[a, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x \leq b\}$
6.8	$(a, b]$	Интервал, открытый слева, от a до b с включением точки b	$(a, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x \leq b\}$. В качестве эквивалентного может быть использовано выражение $]a, b]$
6.9	$[a, b)$	Интервал, открытый справа, от a до b с включением точки a	$[a, b) = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x < b\}$. В качестве эквивалентного может быть использовано выражение $[a, b[$
6.10	(a, b)	Открытый интервал от a до b без включения точек a и b	$(a, b) = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x < b\}$. В качестве эквивалентного может быть использовано выражение $]a, b[$
6.11	$(-\infty, b]$	Полузакрытый неограниченный интервал до b, включая точку b	$(-\infty, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid x \leq b\}$. В качестве эквивалентного может быть использовано выражение $]-\infty, b]$
6.12	$(-\infty, b)$	Полуоткрытый неограниченный интервал до b, исключая точку b	$(-\infty, b) = \{x \in \mathbf{R} \mid x < b\}$. В качестве эквивалентного может быть использовано выражение $]-\infty, b[$
6.13	$[a, +\infty)$	Полузакрытый неограниченный интервал до a, включая точку a	$[a, +\infty) = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x\}$. В качестве эквивалентных могут быть использованы выражения $[a, \infty[$, $[a, +\infty[$ и $[a, \infty)$
6.14	$(a, +\infty)$	Полуоткрытый неограниченный интервал до a, исключая точку a	$(a, +\infty) = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x\}$. В качестве эквивалентных могут быть использованы выражения $]a, +\infty[$, $]a, \infty[$ и (a, ∞)

7 Разные знаки и символы

Знаки, символы, выражения, используемые для разных знаков и символов, приведены в таблице 7.1.

Таблица 7.1 — Знаки, символы, выражения, используемые для разных знаков и символов

Номер знака, символа, выражения	Знак, символ, выражение	Значение и устный эквивалент	Примечания, примеры
7.1	$a = b$	a равно b	Может быть использован символ ≡, если необходимо подчеркнуть идентичность a и b (см. 7.18)
7.2	$a \neq b$	a не равно b	Черточка отрицания может также быть вертикальной
7.3	$a := b$	a по определению равно b	Пример — $\boldsymbol{p} := m\mathbf{v}$, где $\boldsymbol{p}$ — импульс, m — масса, $\mathbf{v}$ — скорость. Могут также быть использованы символы $=_{def}$ и $\stackrel{def}{=}$
7.4	$a \stackrel{\wedge}{=} b$	a соответствует b	Пример — Если $E = kT$, то 1 eV $\stackrel{\wedge}{=}$ 11 604,5 K. Если 1 см на карте соответствует длине 10 км, можно записать 1 см $\stackrel{\wedge}{=}$ 10 км. Соответствие не может быть симметричным
7.5	$a \approx b$	a приближенно равно b	Качество приближения определяет пользователь. Равенство включено
7.6	$a \simeq b$	a асимптотически равно b	Пример — $\frac{1}{\sin(x-a)} \simeq \frac{1}{x-a}$ при $x \to a$. (для $x \to a$, см. 7.16)
7.7	$a \sim b$	a пропорционально b	Символ ~ также используют для обозначения отношения эквивалентности. В качестве эквивалентного может быть использовано выражение $a \propto b$
7.8	$M \cong N$	M конгруэнтно N, M изоморфно N	Пример — M и N — множества точек (геометрические фигуры). Этот символ также используют для обозначения изоморфизма математических структур
7.9	$a < b$	a меньше b	—
7.10	$b > a$	b больше a	—
7.11	$a \leq b$	a меньше или равно b	—
7.12	$b \geq a$	b больше или равно a	—
7.13	$a << b$	a много меньше b	Является ли a достаточно маленьким по сравнению с b определяет пользователь
7.14	$b >> a$	b много больше a	Является ли b достаточно большим по сравнению с a определяет пользователь

Окончание таблицы 7.1

Номер знака, символа, выражения	Знак, символ, выражение	Значение и устный эквивалент	Примечания, примеры
7.15	∞	Бесконечность	Данный символ не обозначает число, но является часто используемым в различных выражениях, относящихся к границам интервалов. Также используют обозначение $+\infty$, $-\infty$
7.16	$x \to a$	x стремится к a	Данное выражение часто используют в различных выражениях для описания границ интервалов. Вместо a могут быть использованы ∞, $+\infty$, или $-\infty$
7.17	$m\|n$	m нацело делит n, n делится на m без остатка	Для целых m и n: $\exists k \in \mathbf{Z}$ такое, что $m \cdot k = n$
7.18	$n \equiv k \bmod m$	n конгруэнтно (сравнимо) с k по mod m (остатку от деления на m)	Для целых чисел n, k и m: $m\|(n - k)$ (см. 7.1)
7.19	$(a + b)$ $[a + b]$ $\{a + b\}$ $\langle a+b \rangle$	Круглые скобки Квадратные скобки Фигурные скобки Угловые скобки	Рекомендуется по возможности использовать только круглые скобки, т. к. у квадратных и фигурных скобок есть определенное значение в специфических областях

8 Элементарная геометрия

Знаки, символы, выражения, используемые в элементарной геометрии, приведены в таблице 8.1.

Т а б л и ц а 8.1 — Знаки, символы, выражения, используемые в элементарной геометрии

Номер знака, символа, выражения	Знак, символ, выражение	Значение и устный эквивалент	Примечания, примеры
8.1	AB||CD	Прямая AB параллельна прямой CD	Записывают g || h, если g и h — прямые линии, проходящие через точки A, B и C, D соответственно. В качестве эквивалентной используют запись AB//CD
8.2	AB$\perp$CD	Прямая AB перпендикулярна прямой CD	Записывают g $\perp$ h, если g и h — прямые, проходящие через точки A, B и C, D соответственно. На графике прямые линии должны пересекаться под прямым углом
8.3	$\sphericalangle$ABC	Угол при вершине B треугольника ABC	В общем случае угол имеет направление и для него справедливы следующие соотношения: $\sphericalangle$ABC = $\sphericalangle$CBA, $0 \le \sphericalangle ABC \le \pi$ рад
8.4	$\overline{AB}$	Отрезок прямой от A до B	Отрезок прямой — множество точек между точками A и B на прямой AB
8.5	$\overrightarrow{AB}$	Вектор от A до B	Если $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, то B находится на таком же расстоянии от A, как D от C. Из этого следует, что A = C и B = D
8.6	d (A, B)	Расстояние между точками A и B	Длина отрезка $\overline{AB}$, а также величина вектора $\overrightarrow{AB}$

9 Операции

Знаки, символы, выражения, используемые для обозначения операций, приведены в таблице 9.1.

Таблица 9.1 — Знаки, символы, выражения, используемые для обозначения операций

Номер знака, символа, выражения	Знак, символ, выражение	Значение и устный эквивалент	Примечания, примеры
9.1	$a + b$	a плюс b	Эту операцию называют операцией сложения. Символ «+» является знаком сложения
9.2	$a - b$	a минус b	Эту операцию называют операцией вычитания. Символ «–» является знаком вычитания
9.3	$a \pm b$	a плюс/минус b	Это — комбинация двух значений в одном выражении
9.4	$a \mp b$	a минус/плюс b	$-(a \pm b) = -a \mp b$
9.5	$a \cdot b$ $a \times b$ $a\ b$ ab	Умножение a на b	Эту операцию называют операцией умножения. Символом умножения является точка (·) или косой крестик (×). Знак умножения может быть опущен, если ошибка исключена. См. также 5.16, 5.17, 17.11, 17.12, 17.23 и 17.24 для использования точки и крестика в различных случаях
9.6	$\frac{a}{b}$ a/b	Деление a на b	$\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}$. См. также 7.1.3 [3]. Для деления применяют также знак (:). Пример — Отношение высоты h к ширине b листа А4 равно $h : b = \sqrt{2}$. Не следует использовать знак ÷
9.7	$\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$	$a_1 + a_2 + ... + a_n$, сумма $a_1, a_2, ..., a_n$	Применимы также выражения $\sum_{i=1}^{n} a_i$, $\sum\limits_{i} a_i$, $\sum_i a_i$, $\sum a_i$
9.8	$\prod\limits_{i=1}^{n} a_i$	$a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n$, произведение $a_1, a_2, ..., a_n$	Применимы также выражения $\prod_{i=1}^{n} a_i$, $\prod\limits_{i} a_i$, $\prod_i a_i$ и $\prod a_i$
9.9	a^p	a в степени p	Устным эквивалентом a^2 является a в квадрате. Устным эквивалентом a^3 является a в кубе
9.10	$a^{1/2}$ $\sqrt{a}$	a в степени $^1/_2$. Корень квадратный из a	Если $a \geq 0$, то $\sqrt{a} \geq 0$. Для обозначения квадратного корня не следует применять символ $\surd a$. См. 9.11
9.11	$a^{1/n}$ $\sqrt[n]{a}$	a в степени $1/n$. Корень n-й степени из a	Если $a \geq 0$, то $\sqrt[n]{a} \geq 0$. Для обозначения корня n-й степени не следует применять $\sqrt[n]{}a$. Для исключения ошибки в сложных случаях следует применять круглые скобки

Продолжение таблицы 9.1

Номер знака, символа, выражения	Знак, символ, выражение	Значение и устный эквивалент	Примечания, примеры
9.12	$\bar{x}$ $\langle x \rangle$ $\bar{x}_a$	Выборочное среднее x. Среднее арифметическое x	Другие выборочные значения: - гармоническое среднее обозначают добавлением индекса h, - среднее геометрическое обозначают добавлением индекса g, - квадратный корень из среднего арифметического квадратов или среднеквадратичное значение обозначают добавлением индекса q. Индекс может быть опущен только для среднего арифметического. В математике $\bar{x}$ используют также для обозначения комплексного числа, сопряженного с x (см. 14.6)
9.13	sgn a	Сигнум a	Для действительного a: $\operatorname{sgn} a = \begin{cases} 1, & \text{если } a>0 \\ 0, & \text{если } a=0 \\ -1, & \text{если } a<0 \end{cases}$ См. 14.7
9.14	inf M	Инфинум M	Наибольшая нижняя грань непустого множества, ограниченного снизу
9.15	sup M	Супремум M	Наименьшая верхняя грань непустого множества, ограниченного сверху
9.16	$\|a\|$	Абсолютное значение a. Модуль a. Абсолютная величина a	Обозначение abs a также может быть использовано. Абсолютное значение действительного числа a. Модуль комплексного числа a (см. 14.4). Модуль вектора a (см. 17.4, 5.5)
9.17	$\lfloor a \rfloor$	Округление a до ближайшего целого в меньшую сторону (антье). Наибольшее целое число, равное действительному числу a или меньше его	Обозначение ent a также может быть использовано. Примеры — $\lfloor 2{,}4 \rfloor = 2$, $\lfloor -2{,}4 \rfloor = -3$
9.18	$\lceil a \rceil$	Округление a до ближайшего целого в большую сторону. Наименьшее целое число, больше или равное действительному числу a	Примеры — $\lceil 2{,}4 \rceil = 3$, $\lceil -2{,}4 \rceil = -2$
9.19	int a	Целая часть действительного числа a	$\operatorname{int} a = \operatorname{sgn} a \cdot \lfloor \|a\| \rfloor$ Примеры — int (2,4) = 2, int (–2,4) = –2. В качестве эквивалентного может быть использовано обозначение [a], int a = [a]

Окончание таблицы 9.1

Номер знака, символа, выражения	Знак, символ, выражение	Значение и устный эквивалент	Примечания, примеры
9.20	frac a	Дробная часть действительного числа a	frac a = a – int a. Примеры — frac(2,4) = 0,4, frac(–2,4) = –0,4. В качестве эквивалентного может быть использовано обозначение $\{a\}$, frac $a = \{a\}$
9.21	$\min(a,\ b)$	Минимум из a и b	Операция выбора наименьшего числа из набора чисел. Однако в бесконечном наборе чисел может не быть наименьшего элемента
9.22	$\max(a,\ b)$	Максимум из a и b	Операция выбора наибольшего числа из набора чисел. Однако в бесконечном наборе чисел может не быть наибольшего элемента

10 Комбинаторика

Знаки, символы, выражения, используемые в комбинаторике, приведены в таблице 10.1.
В данном разделе n и k — натуральные числа и $k \le n$.

Таблица 10.1 — Знаки, символы, выражения, используемые в комбинаторике

Номер знака, символа, выражения	Знак, символ, выражение	Значение и устный эквивалент	Примечания, примеры
10.1	$n!$	Факториал числа n	$n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n\ (n > 0)$ $0! = 1$
10.2	$a^{\underline{k}}$ $[a]_k$	Убывающий факториал	$a^{\underline{k}} = a(a-1) \cdot \ldots \cdot (a-k+1)\ (k > 0)$ $a^{\underline{0}} = 1$ a может быть комплексным числом. Для натурального числа n: $n^{\underline{k}} = \frac{n!}{(n-k)!}$
10.3	$a^{\overline{k}}$ $(a)_k$	Возрастающий факториал	$a^{\overline{k}} = a(a+1) \cdot \ldots \cdot (a+k-1)\ (k > 0)$ $a^{\overline{0}} = 1$ a может быть комплексным числом. Для натурального числа n: $n^{\overline{k}} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!}$. $(a)_k$ называется символом Почхаммера в теории специальных функций. В комбинаторике и статистике этот символ часто используют для обозначения убывающего факториала

Окончание таблицы 10.1

Номер знака, символа, выражения	Знак, символ, выражение	Значение и устный эквивалент	Примечания, примеры
10.4	$\binom{n}{k}$	Биномиальный коэффициент	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ $(0 \le k \le n)$
10.5	B_n	Числа Бернулли	$\mathrm{B}_n = -\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+1}{k}\mathrm{B}_n\,(n>0)$, $\mathrm{B}_0 = 1$, $\mathrm{B}_1 = -1/2$, $\mathrm{B}_{2n+3} = 0$
10.6	C_n^k	Число сочетаний из n по k без повторений	$\mathrm{C}_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
10.7	${}^{\mathrm{R}}\mathrm{C}_n^k$	Число сочетаний из n по k с повторениями	${}^{\mathrm{R}}\mathrm{C}_n^k = \binom{n+k-1}{k}$
10.8	V_n^k	Количество размещений без повторений из n по k	$\mathrm{V}_n^k = n^{\underline{k}} = \frac{n!}{(n-k)!}$ При $n = k$ количество размещений равно количеству перестановок
10.9	${}^{R}\mathrm{V}_n^k$	Количество размещений с повторениями из n по k	${}^{\mathrm{R}}\mathrm{V}_n^k = n^k$
10.10	P_{n}	Количество перестановок порядка n	$P_{\mathrm{n}} = n!$ $P_{\mathrm{n}} = \mathrm{V}_n^n$

11 Функции

Знаки, символы, выражения для функций приведены в таблице 11.1.

Т а б л и ц а 11.1 — Знаки, символы, выражения для функций

Номер знака, символа, выражения	Знак, символ, выражение	Значение и устный эквивалент	Примечания, примеры
11.1	$f, g, h, \ldots$	Функция	Функция ставит в соответствие каждому аргументу из области определения функции одно или несколько значений из области значений функции
11.2	$f(x)$ $f(x_1, \ldots, x_n)$	Значение функции f для аргумента x или аргумента $(x_1, \ldots, x_n)$ соответственно	Функция, имеющая n-аргументов, является n мерной функцией
11.3	$f\colon A \to B$	f отображает A в B	Функция f имеет область определения A и область значений B
11.4	$f\colon x \mapsto T(x)$, $x \in A$	f — функция, которая переводит $x \in A$ в $T(x)$	$T(x)$ обозначает значение функции f для аргумента x. Поскольку $f(x) = T(x)$, определяющий символ часто используют в качестве символа вместо функции f. Пример — $f\colon x \mapsto 3x^2y$, $x \in [0; 2]$. f — функция параметра y, равная произведению $3x^2y$, определенная на заданном интервале [0; 2]

Продолжение таблицы 11.1

Номер знака, символа, выражения	Знак, символ, выражение	Значение и устный эквивалент	Примечания, примеры
11.5	$x \xrightarrow{f} y$	$f(x) = y$ f ставит в соответствие значениям x значения y	Пример — $\pi \xrightarrow{\cos} -1$
11.6	$f\vert_a^b$ $f(\ldots, u, \ldots)\Big\vert_{u=a}^{u=b}$	$f(b) - f(a)$ $f(\ldots, b, \ldots) - f(\ldots, a, \ldots)$	Данное обозначение используют главным образом при вычислении определенных интегралов
11.7	$g \circ f$	Сложная функция f и g	$(g \circ f)(x) = g(f(x))$. В выражении $g \circ f$ указана последовательность применения функций g и f
11.8	$\lim\limits_{x \to a} f(x)$ $\lim_{x \to a} f(x)$	Предел $f(x)$ при x стремящемся к a	Выражение $f(x) \to b$ при $x \to a$ может быть записано в виде $\lim_{x \to a} f(x) = b$. Пределы «справа» ($x > a$) и «слева» ($x < a$) обозначают в виде $\lim_{x \to a+} f(x)$ и $\lim_{x \to a-} f(x)$ соответственно
11.9	$f(x) = O(g(x))$	$f(x)$ есть О большое от $g(x)$. Отношение $\vert f(x)/g(x) \vert$ ограничено сверху в пределе, подразумеваемом контекстом. $f(x)$ имеет порядок, сопоставимый с или менее $g(x)$	Символ «=» в данном случае не является равенством и не обладает свойством транзитивности. Пример — $\sin x = O(x)$ при $x \to 0$
11.10	$f(x) = o(g(x))$	$f(x)$ есть о маленькое от $g(x)$. Отношение $f(x)/g(x) \to 0$ в пределе, подразумеваемом контекстом. $f(x)$ имеет порядок менее $g(x)$	Символ «=» в данном случае не является равенством и не обладает свойством транзитивности. Пример — $\cos x = 1 + o(x)$, при $x \to 0$
11.11	Δf	Дельта f. Конечное приращение f	Разность двух значений функции. Примеры — $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta f = f(x_2) - f(x_1)$
11.12	$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ $\mathrm{d}f/\mathrm{d}x$ f'	Производная от функции f по x	Данное обозначение следует использовать только для функций одной переменной. Обозначения $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$, $\mathrm{d}f(x)/\mathrm{d}x$, $f'(x)$ и $\mathrm{D}f$ также могут быть использованы. Если независимой переменной является время t, то $\dot{f}$ также может быть использовано взамен f'
11.13	$\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)_{x=a}$ $(\mathrm{d}f/\mathrm{d}x)_{x=a}$ $f'(a)$	Значение производной функции f для $x = a$	—

Продолжение таблицы 11.1

Номер знака, символа, выражения	Знак, символ, выражение	Значение и устный эквивалент	Примечания, примеры
11.14	$\frac{d^n f}{dx^n}$ $d^n f / dx^n$ $f^{(n)}$	n-я производная функции f по x	Следует использовать только для функций одной переменной. $\frac{d^n f(x)}{dx^n}$, $d^n f(x) / dx^n$, $f^{(n)}(x)$ и $D^n f$ также могут быть использованы. f'' и f''' также используют для $f^{(2)}$ и $f^{(3)}$, соответственно. Если независимой переменной является время t, то для f'' используют также обозначение $\ddot{f}$
11.15	$\frac{\partial f}{\partial x}$ $\partial f / \partial x$ $\partial_x f$	Частная производная функции f по x	Следует использовать только для функции нескольких переменных $\frac{\partial f(x, y, ...)}{\partial x}$, $\partial f(x, y, ...)/\partial x$. Обозначения $\partial_x f(x, y, ...)$ и $D_x f(x, y, ...)$ также могут быть использованы. Другие независимые переменные могут быть показаны в виде индексов, например $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y...}$ Данные обозначения распространяются также на производные более высокого порядка, например $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$. Другие обозначения, например $f_{xy} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$, также могут быть использованы
11.16	df	Полный дифференциал функции f	$df(x, y, ...) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + ...$
11.17	δf	Бесконечно малое изменение функции f	—
11.18	$\int f(x)dx$	Неопределенный интеграл функции f	—
11.19	$\int_a^b f(x)dx$	Определенный интеграл f от a до b	Это простой случай функции, определенной на интервале. Интеграл от функции, имеющей более общую область определения, также может быть определен. Специальные обозначения, например $\int_C$, $\int_S$, $\int_V$, $\oint$, используют для интеграла по кривой C, поверхности S, трехмерной области V и замкнутой кривой или поверхности соответственно. Многократные интегралы обозначают аналогично $\iint$, $\oiint$ и т. д.

Окончание таблицы 11.1

Номер знака, символа, выражения	Знак, символ, выражение	Значение и устный эквивалент	Примечания, примеры
11.20	$\fint_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$	Значение интеграла типа Коши от функции f, имеющей особую точку c	$\lim\limits_{\delta\to 0+}\left(\int_a^{c-\delta} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c+\delta}^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)$, где $a < c < b$
11.21	$\fint_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$	Значение интеграла типа Коши от функции f	$\lim\limits_{a\to\infty}\left(\fint_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x\right)$
11.22	$W(x, f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \ldots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \ldots & f_n'(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \ldots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$	Определитель Вронского	Функции $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ имеют общую область определения

12 Показательная и логарифмическая функции

Могут быть использованы сложные аргументы, в особенности с основанием e.

Знаки, символы, выражения для показателей и логарифмической функции приведены в таблице 12.1.

Таблица 12.1 — Знаки, символы, выражения для показателей и логарифмической функции

Номер знака, символа, выражения	Знак, символ, выражение	Значение и устный эквивалент	Примечания, примеры
12.1	e	Основание натурального логарифма	$\mathrm{e} := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2{,}718\,281\,8\ldots$
12.2	a^x	Показательная функция аргумента x с основанием a	См. 9.9
12.3	e^x, $\exp x$	Показательная функция аргумента x с основанием e	См. 14.5
12.4	$\log_a x$	Логарифм аргумента x по основанию a	Выражение $\log x$ используют в случаях, когда основание логарифма не указано
12.5	$\ln x$	Натуральный логарифм x	$\ln x = \log_{\mathrm{e}} x$. Не следует использовать $\log x$ вместо $\ln x$, $\lg x$, $\mathrm{lb}\, x$, $\log_{\mathrm{e}} x$, $\log_{10} x$, $\log_2 x$
12.6	$\lg x$	Десятичный логарифм x	$\lg x = \log_{10} x$. См. 12.5
12.7	$\mathrm{lb}\, x$	Двоичный логарифм x	$\mathrm{lb}\, x = \log_2 x$. См. 12.5

13 Тригонометрические и гиперболические функции

Знаки, символы, выражения для тригонометрических и гиперболических функций приведены в таблице 13.1.

Таблица 13.1 — Знаки, символы, выражения для тригонометрических и гиперболических функций

Номер знака, символа, выражения	Знак, символ, выражение	Значение и устный эквивалент	Примечания, примеры
13.1	π	Отношение длины окружности к ее диаметру	π = 3,141 592 6…
13.2	$\sin x$	Синус x	$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$, $\sin x = x - x^3/3! + x^5/5! - \ldots$. Для $(\sin x)^n$, $(\cos x)^n$ и т. д. используют обозначения $\sin^n x$, $\cos^n x$ и т. д.
13.3	$\cos x$	Косинус x	$\cos x = \sin(x + \pi/2)$
13.4	$\tan x$	Тангенс x	$\tan x = \sin x/\cos x$. По возможности следует избегать использования обозначения $\mathrm{tg}\ x$
13.5	$\cot x$	Котангенс x	$\cot x = 1/\tan x$. По возможности следует избегать использования обозначения $\mathrm{ctg}\ x$
13.6	$\sec x$	Секанс x	$\sec x = 1/\cos x$
13.7	$\csc x$	Косеканс x	$\csc x = 1/\sin x$. Обозначение $\mathrm{cosec}\ x$ также может быть использовано
13.8	$\arcsin x$	Арксинус x	$y = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y$, $-\pi/2 \le y \le \pi/2$. Функция arcsin является обратной к функции sin с упомянутым выше ограничением
13.9	$\arccos x$	Арккосинус x	$y = \arccos x \Leftrightarrow x = \cos y$, $0 \le y \le \pi$. Функция arccos является обратной к функции cos с указанным выше ограничением
13.10	$\arctan x$	Арктангенс x	$y = \arctan x \Leftrightarrow x = \tan y$, $-\pi/2 < y < \pi/2$. Функция arctan является обратной к функции tan с упомянутым выше ограничением. По возможности следует избегать использования обозначения arctg
13.11	$\mathrm{arccot}\ x$	Арккотангенс x	$y = \mathrm{arccot}\ x \Leftrightarrow x = \cot y$, $0 < y < \pi$. Функция arccot является обратной к функции cot с упомянутым выше ограничением. По возможности следует избегать использования обозначения $\mathrm{arcctg}\ x$
13.12	$\mathrm{arcsec}\ x$	Арксеканс x	$y = \mathrm{arcsec}\ x \Leftrightarrow x = \sec y$, $0 \le y \le \pi$, $y \ne \pi/2$. Функция arcsec является обратной к функции sec с упомянутым выше ограничением

Продолжение таблицы 13.1

Номер знака, символа, выражения	Знак, символ, выражение	Значение и устный эквивалент	Примечания, примеры
13.13	arccsc x	Арккосеканс x	$y = \text{arccsc}\, x \Leftrightarrow x = \csc y$, $-\pi/2 \le y \le \pi/2$, $y \ne 0$. Функция arccsc является обратной к функции csc с упомянутым выше ограничением. По возможности следует избегать использования обозначения arccosec x
13.14	sinh x	Гиперболический синус x	$\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\sinh x = x + x^3/3! + \ldots$. По возможности следует избегать использования обозначения sh x
13.15	cosh x	Гиперболический косинус x	$\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\cosh^2 x = \sinh^2 x + 1$. По возможности следует избегать использования обозначения ch x
13.16	tanh x	Гиперболический тангенс x	$\tanh x = \sinh x/\cosh x$. По возможности следует избегать использования обозначения th x
13.17	coth x	Гиперболический котангенс x	$\coth x = 1/\tanh x$
13.18	sech x	Гиперболический секанс x	$\text{sech}\, x = 1/\cosh x$
13.19	csch x	Гиперболический косеканс x	$\text{csch}\, x = 1/\sinh x$. По возможности следует избегать использования обозначения cosech x
13.20	arsinh x	Обратный гиперболический синус x. Гиперболический арксинус x	$y = \text{arsinh}\, x \Leftrightarrow x = \sinh y$. Функция arsinh является обратной к функции sinh. По возможности следует избегать использования обозначения arsh x
13.21	arcosh x	Обратный гиперболический косинус x. Гиперболический арккосинус x	$y = \text{arcosh}\, x \Leftrightarrow x = \cosh y$, $y \ge 0$. Функция arcosh является обратной к функции cosh с упомянутым выше ограничением. По возможности следует избегать использования обозначения arch x
13.22	artanh x	Обратный гиперболический тангенс x. Гиперболический арктангенс x	$y = \text{artanh}\, x \Leftrightarrow x = \tanh y$. Функция artanh является обратной к функции tanh. По возможности следует избегать использования обозначения arth x
13.23	arcoth x	Обратный гиперболический котангенс x. Гиперболический арккотангенс x	$y = \text{arcoth}\, x \Leftrightarrow x = \coth y$, $y \ne 0$. Функция arcoth является обратной к функции coth с упомянутым выше ограничением
13.24	arsech x	Обратный гиперболический секанс x. Гиперболический арксеканс x	$y = \text{arsech}\, x \Leftrightarrow x = \text{sech}\, y$, $y \ge 0$. Функция arsech является обратной к функции sech с упомянутым выше ограничением

Окончание таблицы 13.1

Номер знака, символа, выражения	Знак, символ, выражение	Значение и устный эквивалент	Примечания, примеры
13.25	arcsch x	Обратный гиперболический косеканс x. Гиперболический арккосеканс x	$y = \operatorname{arcsch} x \Leftrightarrow x = \operatorname{csch} y$, $y \geq 0$. Функция arcsch является обратной к функции csch с упомянутым ограничением выше. По возможности следует избегать использования обозначения arcosech x

14 Комплексные числа

Знаки, символы, выражения для комплексных чисел приведены в таблице 14.1.

Таблица 14.1 — Знаки, символы, выражения для комплексных чисел

Номер знака, символа, выражения	Знак, символ, выражение	Значение и устный эквивалент	Примечания, примеры
14.1	i j	Мнимая единица	$\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = -1$. i используют в математике и в физике, j используют в электротехнике
14.2	Re z	Действительная часть z	$z = x + \mathrm{i}y$, где x и y — действительные числа
14.3	Im z	Мнимая часть z	$x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. См. 14.2
14.4	$\|z\|$	Модуль z	$\|z\| = \sqrt{x^2 + y^2}$, где $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$ (см. 9.16)
14.5	arg z	Аргумент z	$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, где $r = \|z\|$ и $\varphi = \arg z$, $-\pi < \varphi \leq \pi$, например, $\operatorname{Re} z = r \cos \varphi$, $\operatorname{Im} z = r \sin \varphi$
14.6	$\bar{z}$ z^*	Число комплексно сопряженное с z	Обозначение $\bar{z}$ главным образом используют в математике. Обозначение z^* главным образом используют в физике и технике
14.7	sgn z	Сигнум z	$\operatorname{sgn} z = z/\|z\| = \exp(\mathrm{i} \arg z)$, $(z \neq 0)$. $\operatorname{sgn} z = 0$ для $z = 0$ (см. 9.13)

15 Матрицы

Знаки, символы, выражения для операций с матрицами приведены в таблице 15.1.

Матрицы обычно обозначают жирными курсивными заглавными буквами, а их элементы тонкими курсивными строчными буквами, но могут быть также использованы и другие шрифты.

Т а б л и ц а 15.1 — Знаки, символы, выражения для операций с матрицами

Номер знака, символа, выражения	Знак, символ, выражение	Значение и устный эквивалент	Примечания, примеры
15.1	$\boldsymbol{A}$ $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$	Матрица $\boldsymbol{A}$ размера m на n	Матрица $\boldsymbol{A}$ с элементами $a_{ij} = (\boldsymbol{A})_{ij}$, состоящая из m строк и n столбцов. Обозначение $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ также может быть использовано. Вместо круглых скобок могут быть использованы квадратные скобки
15.2	$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$	Сумма матриц $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$	$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, где $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = (c_{ij})$, $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$, $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$. Матрицы $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ должны иметь одинаковое количество строк и столбцов
15.3	$x\boldsymbol{A}$	Произведение скаляра x и матрицы $\boldsymbol{A}$	$c_{ij} = xa_{ij}$, где $x\boldsymbol{A} = (c_{ij})$, $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$
15.4	$\boldsymbol{AB}$	Произведение матриц $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$	$c_{ik} = \sum_j a_{ij} \cdot b_{jk}$, где $\boldsymbol{AB} = (c_{ij})$, $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$, $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$. Количество столбцов матрицы $\boldsymbol{A}$ должно быть равно количеству строк матрицы $\boldsymbol{B}$
15.5	$\boldsymbol{E}$ $\boldsymbol{I}$	Единичная матрица	Квадратная матрица, для которой $e_{ik} = \delta_{ik}$, где $\boldsymbol{E} = (e_{ij})$ (см. 17.9)
15.6	$\boldsymbol{A}^{-1}$	Инверсия квадратной матрицы $\boldsymbol{A}$. Обратная матрица матрицы $\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{AA}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$
15.7	$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$	Транспонированная матрица $\boldsymbol{A}$	$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})_{ik} = (\boldsymbol{A})_{ki}$, $c_{ij} = a_{ji}$, где $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = (c_{ij})$, $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$
15.8	$\overline{\boldsymbol{A}}$ $\boldsymbol{A}^*$	Матрица, сопряженная с матрицей $\boldsymbol{A}$	$(\overline{\boldsymbol{A}})_{ik} = \overline{(\boldsymbol{A})_{ik}}$, $c_{ik} = \overline{a}_{ik}$, где $\overline{\boldsymbol{A}} = (c_{ik})$, $\boldsymbol{A} = (a_{ik})$. $\overline{\boldsymbol{A}}$ используется в математике, $\boldsymbol{A}^*$ — в физике и электротехнике. c_{ik} — комплексное число сопряженное с a_{ik}
15.9	$\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$	Матрица, Эрмитово-сопряженная с матрицей $\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} = (\overline{\boldsymbol{A}})^{\mathrm{T}}$. Для $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$ могут также быть использованы обозначения $\boldsymbol{A}^*$ и $\boldsymbol{A}^+$
15.10	det $\boldsymbol{A}$ $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$	Определитель (детерминант) квадратной матрицы $\boldsymbol{A}$	—
15.11	rank $\boldsymbol{A}$	Ранг матрицы $\boldsymbol{A}$	Ранг матрицы $\boldsymbol{A}$ равен количеству ее линейно независимых строк или количеству ее линейно независимых столбцов

Окончание таблицы 15.1

Номер знака, символа, выражения	Знак, символ, выражение	Значение и устный эквивалент	Примечания, примеры
15.12	tr $\boldsymbol{A}$	След квадратной матрицы $\boldsymbol{A}$	tr $\boldsymbol{A} = \sum_i a_{ii}$, где $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$
15.13	$\|\boldsymbol{A}\|$	Норма матрицы $\boldsymbol{A}$	Норма матрицы $\boldsymbol{A}$ представляет собой действительное число, удовлетворяющее следующим условиям: 1) $\|\boldsymbol{A}\| \geq 0$ причем $\|\boldsymbol{A}\| = 0$ только, если $\boldsymbol{A} = 0$; 2) $\|\alpha\boldsymbol{A}\| = \|\alpha\| \cdot \|\boldsymbol{A}\|$, где $\alpha \in R$; 3) $\|\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\| \leq \|\boldsymbol{A}\| + \|\boldsymbol{B}\|$. Могут быть использованы другие нормы матрицы

16 Система координат

Знаки, символы, выражения для систем координат приведены в таблице 16.1.

Таблица 16.1 — Знаки, символы, выражения для систем координат

Номер знака, символа, выражения	Координаты	Вектор положения и его дифференциал	Наименование координат	Примечание
16.1	x, y, z	$r = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z$, $\mathrm{d}r = \mathrm{d}x\,\boldsymbol{e}_x + \mathrm{d}y\,\boldsymbol{e}_y + \mathrm{d}z\,\boldsymbol{e}_z$	Декартовы координаты	x, y, z — координаты, $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ — базисные векторы. Эти координаты могут быть распространены на n-мерное пространство. $\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z$ — ортогональная правосторонняя система координат (см. рисунки 1 — 4). Могут быть использованы базисные векторы $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$
16.2	ρ, φ, z	$\boldsymbol{r} = \rho\,\boldsymbol{e}_\rho + z\boldsymbol{e}_z$, $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}\rho\,\boldsymbol{e}_\rho + \rho\,\mathrm{d}\varphi\boldsymbol{e}_\varphi + \mathrm{d}z\boldsymbol{e}_z$	Цилиндрические координаты	$\boldsymbol{e}_\rho(\varphi), \boldsymbol{e}_\varphi(\varphi), \boldsymbol{e}_z$ — ортогональная правосторонняя система координат (см. рис. 2). Если $z = 0$, то ρ и φ — полярные координаты
16.3	r, ϑ, φ	$\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}_r$, $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}r\,\boldsymbol{e}_r + r\,\mathrm{d}\vartheta\,\boldsymbol{e}_\vartheta + r\sin\vartheta\,\mathrm{d}\varphi\,\boldsymbol{e}_\varphi$	Сферические координаты	$\boldsymbol{e}_r(\vartheta, \varphi), \boldsymbol{e}_\vartheta(\vartheta, \varphi), \boldsymbol{e}_\varphi(\varphi)$ — ортогональная правосторонняя сферическая система координат (см. рисунок 3)
Примечание — В некоторых случаях вместо правосторонней системы координат (см. рисунок 4) используют левостороннюю систему координат (см. рисунок 5). Каждый раз это должно быть четко установлено для исключения возможных ошибок.				

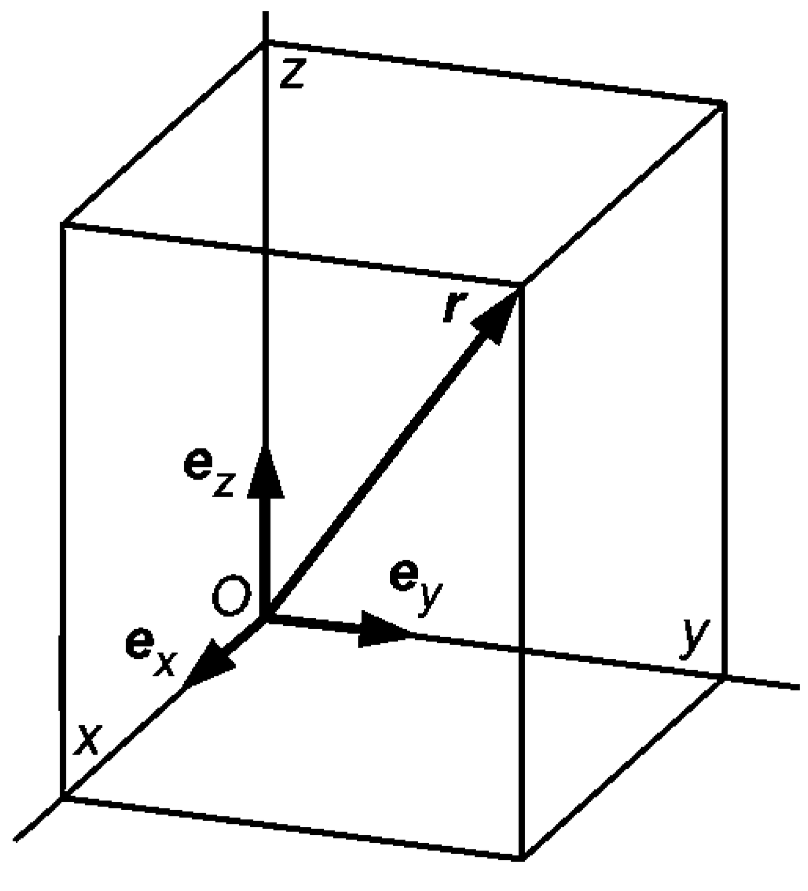


Рисунок 1 — Декартова система координат (правосторонняя

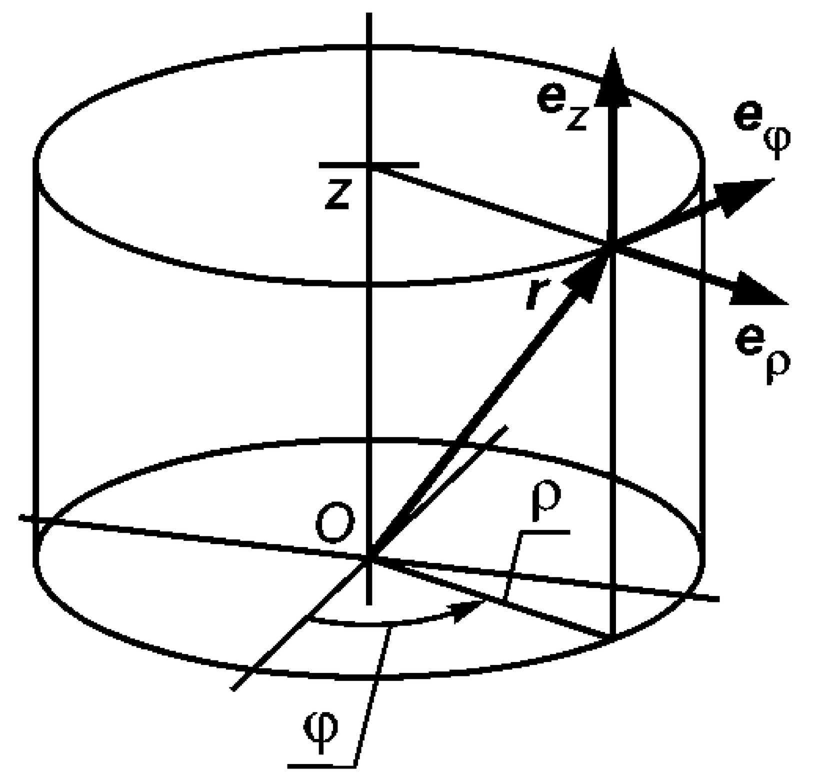


Рисунок 2 — Цилиндрическая система координат (правосторонняя)

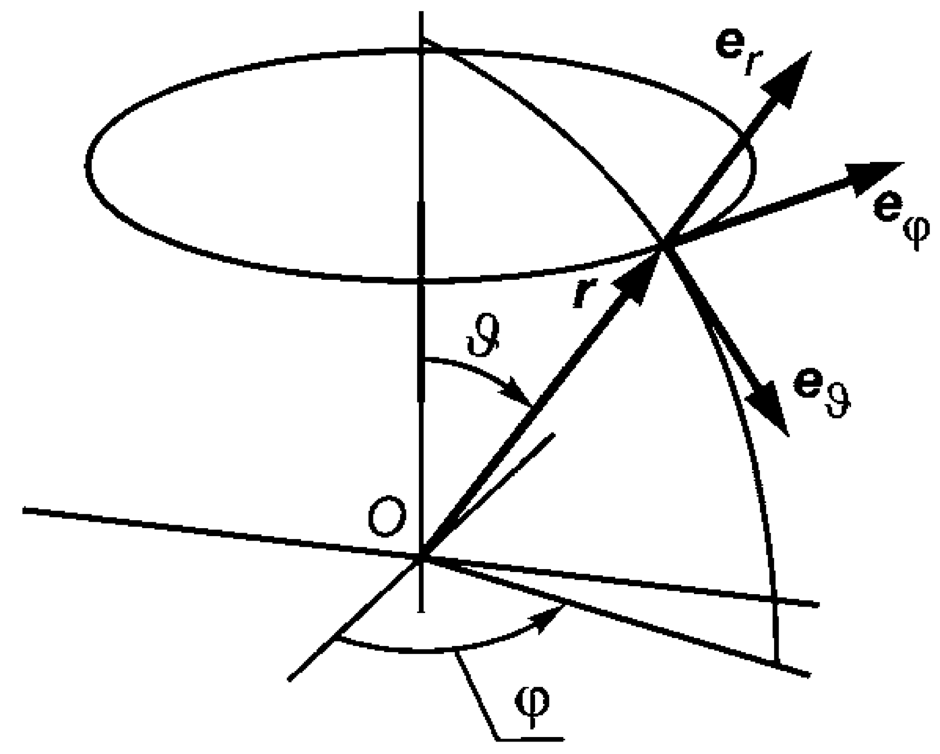
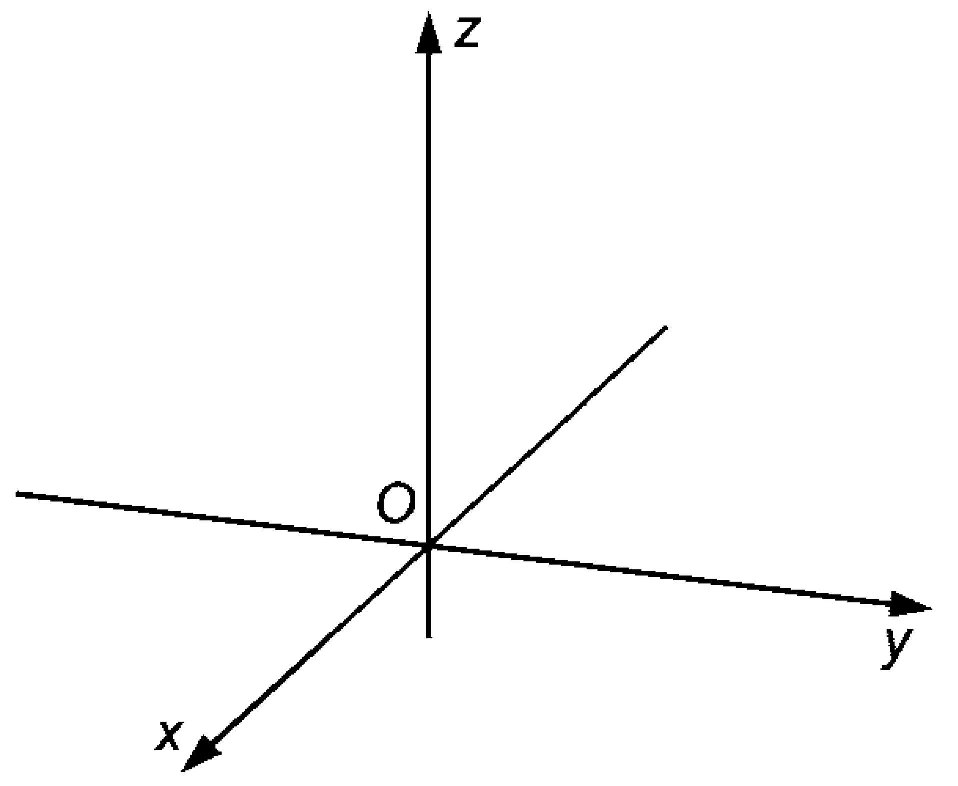
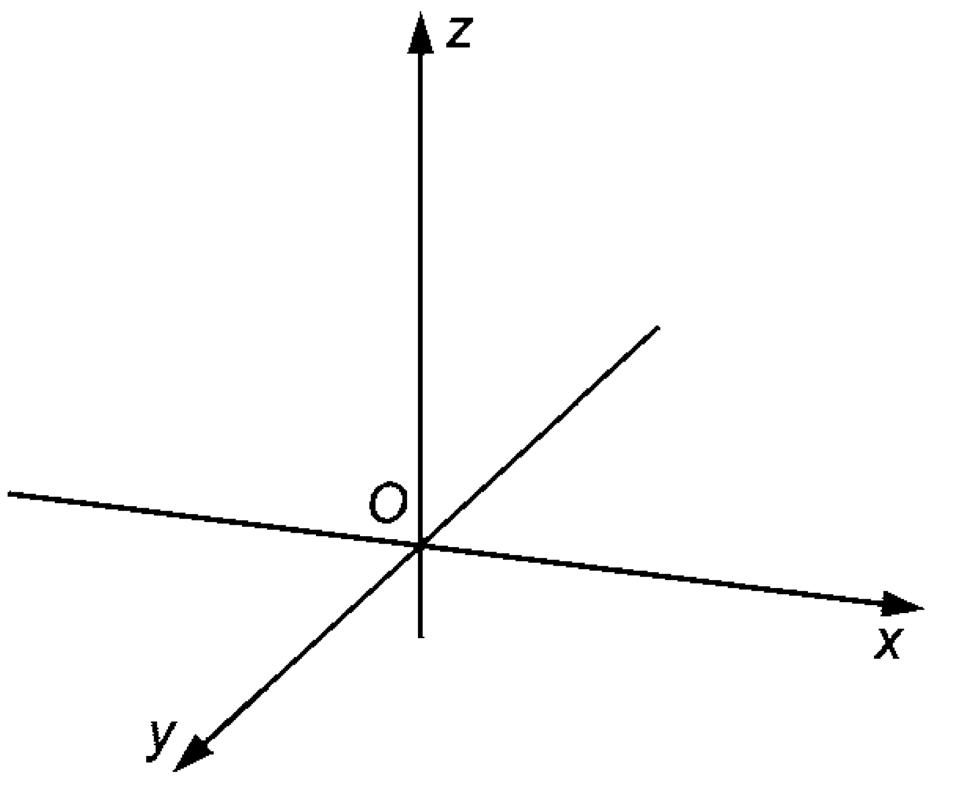


Рисунок 3 — Сферическая система координат (правосторонняя)



Ось x направлена на зрителя

Рисунок 4 — Правосторонняя система координат



Ось y направлена на зрителя

Рисунок 5 — Левосторонняя система координат

17 Скаляры, векторы и тензоры

Скаляры, векторы и тензоры — математические объекты, используемые для обозначения некоторых физических величин и их значений. Они не зависят от выбора системы координат, однако каждый компонент вектора или тензора зависит от этого выбора.

Важно различать компоненты вектора $\boldsymbol{a}$ и базисные векторы, т. е. величины a_x, a_y и a_z и проекции вектора на оси координат $a_x\boldsymbol{e}_x$, $a_y\boldsymbol{e}_y$ и $a_z\boldsymbol{e}_z$. Компоненты вектора часто называют его координатами.

Декартовы компоненты положения вектора определяют декартовы координаты точек начала и конца данного вектора.

Вместо того чтобы рассматривать каждую координату вектора как значение физической величины (т. е. числовое значение, умноженное на единицу измерений), вектор может быть записан как вектор числовых значений, умноженный на единицу измерений (скаляр). Все единицы измерений являются скалярами.

Пример —
$\boldsymbol{F}$ = (3 Н, –2 Н, 5 Н) = (3, –2, 5) Н (в декартовых координатах),
где $\boldsymbol{F}$ — сила;
3 Н — *первый компонент, т. е. F_x вектор силы $\boldsymbol{F}$ с числовым значением 3 и единицей измерений* Н (*другие компоненты:* –2Н *и* 5Н*) соответственно;*
(3, –2, 5) — вектор числовых значений;
Н — единица измерения силы.

То же относится к тензорам второго и более высокого порядка.

В данном разделе рассмотрены только декартовы прямоугольные координаты. Более общие случаи, требующие более сложных представлений, в настоящем стандарте не рассмотрены. Декартовы координаты обозначают x, y, z или x_1, x_2, x_3. В последнем случае используют индексы i, j, k, l, каждый со значениями от 1 до 3, и следующее соглашение суммирования: если такой индекс появляется неоднократно и суммирование по диапазону этого индекса понятно, то индекс под знаком Σ может быть опущен.

Скаляр является тензором нулевого порядка, а вектор — тензором первого порядка.

Компоненты векторов и тензоров часто обозначают одинаковыми символами с соответствующими векторами и тензорами, например, используют обозначение a_i для компонент вектора a, T_{ij} — для компонент тензора второго порядка T и $a_i b_j$ — для компонент векторного произведения $a \times b$.

Знаки, символы, выражения для систем скаляров, векторов и тензоров приведены в таблице 17.1.

Таблица 17.1 — Знаки, символы, выражения для систем скаляров, векторов и тензоров

Номер знака, символа, выражения	Знак, символ, выражение	Значение и устный эквивалент	Примечания, примеры
17.1	$\boldsymbol{a}$ $\vec{a}$	Вектор $\boldsymbol{a}$	Для обозначения вектора может быть использована стрелка над буквенным символом
17.2	$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$	Сумма векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$	$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})_i = a_i + b_i$
17.3	$x\boldsymbol{a}$	Произведение скаляра или координаты x и вектора $\boldsymbol{a}$	$(x\,\boldsymbol{a})_i = xa_i$
17.4	$\lvert\boldsymbol{a}\rvert$ a	Модуль вектора $\boldsymbol{a}$. Норма вектора $\boldsymbol{a}$	$\lvert a\rvert = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$. Обозначение $\lVert\boldsymbol{a}\rVert$ также может быть использовано. См. 9.16
17.5	$\boldsymbol{0}$ 0	Нулевой вектор	Модуль нулевого вектора равен 0
17.6	$\boldsymbol{e_a}$	Единичный вектор направления $\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{e_a} = \boldsymbol{a}/\lvert\boldsymbol{a}\rvert$, $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$. $\boldsymbol{a} = \lvert\boldsymbol{a}\rvert\boldsymbol{e_a}$
17.7	$\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z$ $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$	Единичные базисные векторы. Базисные векторы декартовой системы координат	Обозначения $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ также могут быть использованы
17.8	a_x, a_y, a_z a_i	Декартовы координаты вектора $\boldsymbol{a}$. Декартовы компоненты вектора $\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{e}_x + a_y\,\boldsymbol{e}_y + a_z\boldsymbol{e}_z$. $a_x\boldsymbol{e}_x$, $a_y\boldsymbol{e}_y$, $a_z\boldsymbol{e}_z$ — проекции вектора a на оси координат (x, y, z) или составляющие векторы. Если из контекста понятно, какие векторы являются базисными векторами, вектор может быть записан в виде: $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $a_x = \boldsymbol{a}\boldsymbol{e}_x$, $a_y = \boldsymbol{a}\boldsymbol{e}_y$, $a_z = \boldsymbol{a}\boldsymbol{e}_z$, $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z$ — вектор-радиус точки с координатами x, y, z
17.9	δ_{ik}	Символ дельты Кронекера	$\delta_{ik} = \begin{cases} 1 \text{ для } i = k \\ 0 \text{ для } i \neq k \end{cases}$
17.10	ε_{ijk}	Символ Леви-Чивиты	$\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1$. $\varepsilon_{132} = \varepsilon_{321} = \varepsilon_{213} = -1$. Все другие e_{ijk} равны 0
17.11	$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$	Скалярное произведение векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$. $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \sum_i a_ib_i$. $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}^2 = \lvert\boldsymbol{a}\rvert^2 = a^2$. Могут быть использованы также обозначения $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ и $(\vec{a}, \vec{b})$

Продолжение таблицы 17.1

Номер знака, символа, выражения	Знак, символ, выражение	Значение и устный эквивалент	Примечания, примеры
17.12	$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$	Векторное произведение векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$	Координаты векторного произведения в правосторонней декартовой системе координат имеют вид: $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})_x = a_y b_z - a_z b_y$, $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})_y = a_x b_z - a_z b_x$, $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})_z = a_x b_y - a_y b_x$. $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})_i = \sum_j \sum_k \varepsilon_{ijk} a_j b_k$ (см. 17.10). Пример — $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})\boldsymbol{c} = \det \boldsymbol{A}$, где $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z)$; $\boldsymbol{b} = (b_x, b_y, b_z)$; $\boldsymbol{c} = (c_x, c_y, c_z)$; $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{pmatrix}$. Могут быть использованы также обозначения $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ и $\left[\vec{a}, \vec{b}\right]$
17.13	∇ $\vec{\nabla}$	Оператор набла	$\nabla = e_x \frac{\partial}{\partial x} + e_y \frac{\partial}{\partial x} + e_z \frac{\partial}{\partial z} = \sum_i e_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ Оператор набла также называют «оператором Гамильтона»
17.14	$\nabla\varphi$ **grad** φ	Градиент φ	$\nabla\varphi = \sum_i e_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$. Следует избегать записи оператора grad тонкими линиями
17.15	$\nabla \cdot \boldsymbol{a}$ div $\boldsymbol{a}$	Дивергенция $\boldsymbol{a}$	$\nabla \cdot \boldsymbol{a} = \sum_i \frac{\partial a_i}{\partial x_i}$
17.16	$\nabla \times \boldsymbol{a}$ **rot** $\boldsymbol{a}$	Ротор векторного поля $\boldsymbol{a}$	Координаты $\nabla \times \boldsymbol{a}$ имеют вид: $(\nabla \times \boldsymbol{a})_x = \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}$, $(\nabla \times \boldsymbol{a})_y = \frac{\partial a_z}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial z}$, $(\nabla \times \boldsymbol{a})_z = \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}$. Могут быть использованы также обозначения curl и rot. $(\nabla \times \boldsymbol{a})_i = \sum_j \sum_k \varepsilon_{ijk} \frac{\partial a_k}{\partial x_j}$ (см. 17.10)
17.17	∇^2	Оператор Лапласа, лапласиан	$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$
17.18	$\square$	Оператор Д'Аламбера	$\square = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$

Окончание таблицы 17.1

Номер знака, символа, выражения	Знак, символ, выражение	Значение и устный эквивалент	Примечания, примеры
17.19	$\boldsymbol{T}$ $\vec{\vec{T}}$	Тензор $\boldsymbol{T}$ второго порядка	Вместо обозначения с использованием жирного шрифта может быть использовано обозначение с двумя стрелками
17.20	$T_{xx}, T_{xy}, \ldots, T_{zz}$ $T_{11}, T_{12}, \ldots, T_{33}$	Декартовы компоненты тензора $\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{T} = T_{xx}\boldsymbol{e}_x\boldsymbol{e}_x + T_{xy}\boldsymbol{e}_x\boldsymbol{e}_y + \ldots + T_{zz}\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{e}_z$, где $T_{xx}\boldsymbol{e}_x\boldsymbol{e}_x$, $T_{xy}\boldsymbol{e}_x\boldsymbol{e}_y, \ldots, T_{zz}\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{e}_z$ — составляющие тензоры тензора $\boldsymbol{T}$. Если из контекста ясно, какие использованы базисные векторы, тензор может быть записан в следующем виде: $T = \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{pmatrix}$
17.21	$\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}$ $\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}$	Тензорное произведение двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$	Результирующий тензор второго порядка имеет координаты: $(\boldsymbol{ab})_{ij} = a_i b_j$
17.22	$\boldsymbol{T} \otimes \boldsymbol{S}$	Произведение двух тензоров второго порядка $\boldsymbol{T}$ и $\boldsymbol{S}$	Произведение представляет собой тензор четвертого порядка с координатами: $(\boldsymbol{T} \otimes \boldsymbol{S})_{ijkl} = T_{ij} S_{kl}$
17.23	$\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{S}$	Внутреннее произведение двух тензоров второго порядка $\boldsymbol{T}$ и $\boldsymbol{S}$	Произведение представляет собой тензор второго порядка с координатами: $(\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{S})_{ik} = \sum_j T_{ij} S_{jk}$
17.24	$\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{a}$	Внутреннее произведение тензора второго порядка $\boldsymbol{T}$ и вектора $\boldsymbol{a}$	Произведение представляет собой вектор с координатами: $(\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{a})_i = \sum_j T_{ij} a_j$
17.25	$\boldsymbol{T} : \boldsymbol{S}$	Скалярное произведение двух тензоров второго порядка $\boldsymbol{T}$ и $\boldsymbol{S}$	Произведение представляет собой скалярную величину : $\boldsymbol{T} : \boldsymbol{S} = \sum_i \sum_j T_{ij} S_{ji}$

18 Преобразования

Знаки, символы, выражения для преобразований приведены в таблице 18.1.

Таблица 18.1 — Знаки, символы, выражения для преобразований

Номер знака, символа, выражения	Знак, символ, выражение	Значение и устный эквивалент	Примечания, примеры
18.1	$\mathcal{F}f$	Преобразование Фурье функции f	$(\mathcal{F}f)(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t)\,\mathrm{d}t.$ $(\omega \in \mathbf{R})$. Это преобразование часто обозначают $\mathcal{F}(\omega)$. Обозначение $(\mathcal{F}f)(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t)\,\mathrm{d}t$ также может быть использовано
18.2	$\mathcal{L}f$	Преобразование Лапласа функции f	$(\mathcal{L}f)(s) = \int_{0}^{\infty} e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t.$ $(s \in \mathbf{C})$. Часто используют обозначение $\mathcal{L}(s)$. Также используют двустороннее преобразование Лапласа, определяемое той же формулой, но с минус бесконечностью вместо нуля
18.3	$\mathfrak{Z}(a_n)$	Z преобразование (a_n)	$\mathfrak{Z}(a_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}.$ $(z \in \mathbf{C})$. $\mathfrak{Z}$ — оператор, формирующий не функцию, а последовательность. Используют также двустороннее Z преобразование, определяемое той же формулой, но с минус бесконечностью вместо нуля
18.4	H(x) ε(x)	Функция Хевисайда. Единичная ступенчатая функция	$H(x) = \begin{cases} 1 \text{ для } x \geq 0 \\ 0 \text{ для } x < 0 \end{cases}.$ Обозначение U(x) также может быть использовано. $\vartheta(t)$ используют для обозначения времени. Пример — (LH)(s) = 1/s (Re s > 0)
18.5	δ(x)	Дельта — распределение Дирака. Дельта — функция Дирака	$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\delta(t-x)\,\mathrm{d}t = \varphi(x),$ $H' = \delta$. Также используют наименование «единичный импульс». Пример — Lδ = 1 (см. 18.6 и МЭК 60027-6:2006, п. 2.01)
18.6	f*g	Свертка f и g	$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)\,\mathrm{d}y$

19 Специальные функции

В данном разделе использованы следующие обозначения: a, b, c, z, w, v — комплексные числа; x — действительное число; k, l, m, n — натуральные числа.

Знаки, символы, выражения для специальных функций приведены в таблице 19.1.

Таблица 19.1 — Знаки, символы, выражения для специальных функций

Номер знака, символа, выражения	Знак, символ, выражение	Значение и устный эквивалент	Примечания, примеры
19.1	γ C	Постоянная Эйлера	$\gamma = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n\right) = 0{,}577\,215\,6\ ...$
19.2	$\Gamma(z)$	Гамма-функция	$\Gamma(z)$ — мероморфная функция с полюсами в точках 0, –1, –2, –3, ... $\Gamma(z) = \int\limits_{0}^{\infty} t^{z-1}e^{-t}\,dt,$ (**Re** $z > 0$), $\Gamma(n+1) = n!$ ($n \in \mathbf{N}$)
19.3	$\zeta(z)$	Дзэта-функция Римана	$\zeta(z)$ — мероморфная функция с полюсом в точке $z = 1$. $\zeta(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^z}$ (**Re** $z > 1$)
19.4	$\mathrm{B}(z, w)$	Бета-функция	$\mathrm{B}(z, w) = \int\limits_{0}^{1} t^{z-1}(1-t)^{w-1}dt,$ (**Re** $z > 0$, **Re** $w > 0$), $\mathrm{B}(z, w) = \Gamma(z)\Gamma(w)/\Gamma(z+w),$ $\frac{1}{(n+1)\mathrm{B}(k+1, n-k+1)} = \binom{n}{k}$ ($k \le n$)
19.5	Ei x	Экспоненциальный интеграл	$\mathrm{Ei}\,x = \fint\limits_{-\infty}^{x}\frac{e^t}{t}dt.$ Для $\fint$ см. 11.20
19.6	li x	Логарифмический интеграл	$\mathrm{li}\,x = \int\limits_{0}^{x}\frac{1}{\ln t}dt$ ($0 < x < 1$), $\mathrm{li}\,x = \fint\limits_{0}^{x}\frac{1}{\ln t}dt$ ($x > 1$). Для $\fint$ см. 11.20
19.7	Si z	Интегральный синус	$\mathrm{Si}\,z = \int\limits_{0}^{z}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t,$ $\mathrm{si}\,z = -\frac{\pi}{2} + \mathrm{Si}\,z.$ si z — синусный интеграл смещения
19.8	S(z) C(z)	Интеграл Френеля	$\mathrm{S}(z) = \int\limits_{0}^{z}\sin\left(\frac{\pi}{2}t^2\right)\mathrm{d}t,$ $\mathrm{C}(z) = \int\limits_{0}^{z}\cos\left(\frac{\pi}{2}t^2\right)\mathrm{d}t$

Продолжение таблицы 19.1

Номер знака, символа, выражения	Знак, символ, выражение	Значение и устный эквивалент	Примечания, примеры
19.9	erf x	Функция ошибки	$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^x e^{-t^2} \mathrm{d}t$. Функцию erfc x = (1 – erf x) называют дополнительной функцией ошибок. В статистике используют функцию распределения $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-t^2/2} \mathrm{d}t$
19.10	$\mathrm{F}(\varphi, k)$	Неполный эллиптический интеграл первого рода	$\mathrm{F}(\varphi, k) = \int\limits_0^\varphi \frac{\mathrm{d}\sigma}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \sigma}}$. $\mathrm{K}(k) = \mathrm{F}(\pi/2, k)$ — эллиптический интеграл первого рода (здесь $0 < k < 1$, $k \in \mathbf{R}$)
19.11	$\mathrm{E}(\varphi, k)$	Неполный эллиптический интеграл второго рода	$\mathrm{E}(\varphi, k) = \int\limits_0^\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \sigma}\, \mathrm{d}\sigma$. $\mathrm{E}(k) = \mathrm{E}(\pi/2, k)$ — полный эллиптический интеграл второго рода (здесь $0 < k < 1$, $k \in \mathbf{R}$)
19.12	$\Pi(n, \varphi, k)$	Неполный эллиптический интеграл третьего рода	$\Pi(n, \varphi, k) = \int\limits_0^\varphi \frac{\mathrm{d}\vartheta}{(1+n\sin^2\vartheta)\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta}}$. $\Pi(n, k) = \Pi(n, \pi/2, k)$ — полный эллиптический интеграл третьего рода (здесь $0 < k < 1$, $n, k \in \mathbf{R}$)
19.13	$\mathrm{F}(a, b; c; z)$	Гипергеометрическая функция	$\mathrm{F}(a, b; c; z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n z^n}{(c)_n n!}$ $(-c \notin \mathbf{N})$. Для $(a)_n$, $(b)_n$ и $(c)_n$ см. 10.3. $\mathrm{F}(a, b; c; z)$ является решением уравнения $z(1 - z)y'' + [c - (a + b + 1)z]\, \acute{y} - aby = 0$
19.14	$\mathrm{F}(a; c; z)$	Вырожденная гипергеометрическая функция	$\mathrm{F}(a; c; z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(c)_n n!} z^n$ $(-c \in \mathbf{N})$. Для $(a)_n$ и $(c)_n$ См. 10.3. $\mathrm{F}(a, b; c; z)$ является решением уравнения $zy'' + (c - z)y' - ay = 0$
19.15	$\mathrm{P}_n(z)$	Полином Лежандра	$\mathrm{P}_n(z) = \frac{1}{2^n n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n} (z^2 - 1)^n$ $(n \in \mathbf{N})$. $\mathrm{P}_n(z)$ является решением уравнения $(1 - z^2)y'' - 2zy' + n(n + 1)y = 0$
19.16	$\mathrm{P}_n^m(z)$	Присоединенная функция Лежандра	$\mathrm{P}_n^m(z) = (-1)^m (1 - z^2)^{m/2} \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}z^m} \mathrm{P}_n(z)$ $(m, n \in \mathbf{N}, m \le n)$. $\mathrm{P}_n^m(z)$ является решением уравнения $(1 - z^2)y'' - 2zy' + \left[(n(n+1) - \frac{m^2}{1 - z^2}\right]y = 0$. Коэффициент $(-1)^m$ соответствует общей теории сферических функций

Продолжение таблицы 19.1

Номер знака, символа, выражения	Знак, символ, выражение	Значение и устный эквивалент	Примечания, примеры
19.17	$Y_l^m(\vartheta, \varphi)$	Сферическая гармоника	$Y_l^m(\vartheta, \varphi) = \left[\frac{2l+1)(1-\lvert m\rvert)!}{4\pi(l+\lvert m\rvert)!}\right]^{-1/2} \times P_l^{\lvert m\rvert}(\cos\vartheta)e^{im\varphi}$ $(l, \lvert m\rvert \in \mathbf{N}; \lvert m\rvert \le l)$. $Y_l^m(\vartheta, \varphi)$ является решением уравнения $\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial y}{\partial\vartheta}\right)+\frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}+l(l+1)y=0$
19.18	$H_n(z)$	Полиномы Эрмита	$H_n(z)=(-1)^n e^{z^2}\frac{d^n}{dz^n}e^{-z^2}$. Полиномы Эрмита являются решением уравнения $y'' - 2zy' + 2ny = 0$ $(n \in \mathbf{N})$
19.19	$L_n(z)$	Полиномы Лагерра	$L_n(z) = e^z\frac{d^n}{dz^n}\left(z^n e^{-z}\right)$ $(n \in \mathbf{N})$. $L_n(z)$ являются решением уравнения $zy'' + (1 - z)y' + ny = 0$
19.20	$L_n^m(z)$	Обобщенные полиномы Лагерра	$L_n^m(z) = \frac{d^m}{dz^m}L_n(z)$ $(m \in \mathbf{N}, m \le n)$. $L_n^m(z)$ являются решением уравнения $zy'' + (m + 1 - z)y' + (n - m)y = 0$
19.21	$T_n(z)$	Полиномы Чебышева первого рода	$T_n(z) = \cos(n \arccos z)$ $(n \in \mathbf{N})$. $T_n(z)$) являются решением уравнения $(1 - z^2)y'' - zy' + n^2y = 0$
19.22	$U_n(z)$	Полиномы Чебышева второго рода	$U_n(z) = \frac{\sin[(n+1)\arccos z]}{\sin(\arccos z)}$ $(n \in \mathbf{N})$. $U_n(z)$ является решением уравнения $(1 - z^2)y'' - 3zy' + n(n + 2)y = 0$
19.23	$J_\nu(z)$	Функция Бесселя. Цилиндрическая функция первого рода	$J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(z/2)^{\nu+2k}}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)}$ $(\nu \in \mathbf{C})$. $J_\nu(z)$ являются решением уравнения $z^2y'' + zy' + (z^2 - \nu^2)y = 0$
19.24	$N_\nu(z)$	Функция Неймана. Цилиндрическая функция второго рода	$\mathbf{N}_\nu(z) = \frac{J_\nu(z)\cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(z)}{\sin(\nu\pi)}$ $(\nu \in \mathbf{C})$. Правую сторону этого уравнения заменяют его предельным значением, если $\nu \in \mathbf{Z}$. Обозначение $Y_\nu(z)$ также может быть использовано
19.25	$H_\nu^{(1)}(z)$ $H_\nu^{(2)}(z)$	Функции Ганкеля. Цилиндрические функции третьего рода	$H_\nu^{(1)}(z) = J_\nu(z) + \mathbf{i}\mathbf{N}_\nu(z)$ $H_\nu^{(2)}(z) = J_\nu(z) - \mathbf{i}\mathbf{N}_\nu(z)$ $(\nu \in \mathbf{C})$

Окончание таблицы 19.1

Номер знака, символа, выражения	Знак, символ, выражение	Значение и устный эквивалент	Примечания, примеры
19.26	$\mathrm{I}_\nu(z)$ $\mathrm{K}_\nu(z)$	Модифицированные функции Бесселя	$\mathrm{J}_\nu(z) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}i\nu\pi}\mathrm{J}_\nu\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}i\pi}z\right)$, $\mathrm{K}_\nu(z) = \frac{i\pi}{2}\mathbf{e}^{1/2i\nu\pi}\mathrm{H}_\nu^{(1)}\left(\mathbf{e}^{1/2i\pi}z\right)$. $\mathrm{J}_\nu(z)$ и $\mathrm{K}_\nu(z)$ являются решением уравнения $z^2y'' + zy' - (z^2 + \nu^2)y = 0$
19.27	$\mathrm{j}_l(z)$	Сферические функции Бесселя	$\mathrm{j}_l(z) = \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{J}_{l+1/2}(z)$ $(l \in \mathbf{N})$. $\mathrm{j}_l(z)$ являются решением уравнения $z^2y'' + 2zy' + (z^2 - l(l+1))]y = 0$
19.28	$\mathrm{n}_l(z)$	Сферические функции Неймана	$\mathrm{n}_l(z) = \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{N}_{l+1/2}(z)$ $(l \in \mathbf{N})$. Обозначение $\mathrm{y}_l(z)$ также может быть использовано
19.29	$\mathrm{h}_l^{(1)}(z)$ $\mathrm{h}_l^{(2)}(z)$	Сферические функции Ганкеля	$\mathrm{h}_l^{(1)}(z) = \mathrm{j}_l(z) + i\mathrm{n}_l(z) = \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{N}_{l+\frac{1}{2}}^{(1)}(z)$, $\mathrm{h}_l^{(2)}(z) = \mathrm{j}_l(z) - i\mathrm{n}_l(z) = \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{H}_{l+\frac{1}{2}}^{(2)}(z)$. Модифицированные сферические функции Бесселя (аналогично 19.26) могут быть определены и обозначены $\mathrm{i}_l(z)$ и $\mathrm{k}_l(z)$ соответственно
19.30	Ai(z) Bi(z)	Эйри функции	$\mathrm{Ai}(z) = \frac{1}{3}\sqrt{z}\left[\mathrm{I}_{-\frac{1}{3}}(w) - \mathrm{I}_{\frac{1}{3}}(w)\right]$, $\mathrm{Bi}(z) = \sqrt{\frac{z}{3}}\left[\mathrm{I}_{-\frac{1}{3}}(w) + \mathrm{I}_{\frac{1}{3}}(w)\right]$, где $w = \frac{2}{3}z^{3/2}$. $\mathrm{Ai}(z)$ и $\mathrm{Bi}(z)$ являются решениями уравнения $y'' - zy = 0$

Приложение А
(обязательное)

Шестнадцатеричные коды символов

В данном приложении приведена информация о шестнадцатеричных кодах символов и знаков, приведенных в настоящем стандарте.

Ниже приведена таблица А.1, состоящая из четырех колонок.

В первой колонке указан пункт настоящего стандарта, в котором использован рассматриваемый знак или символ.

Во второй колонке приведен рассматриваемый символ в том виде, как он использован в настоящем стандарте.

В третьей колонке приведен шестнадцатеричный код символа в соответствии с ИСО/МЭК 10646 [2].

Таблица А.1

Номер пункта настоящего стандарта	Символ	Шестнадцатеричный код символа (см. ИСО/МЭК 10646)	Номер пункта настоящего стандарта	Символ	Шестнадцатеричный код символа (см. ИСО/МЭК 10646)
4.1	∧	2227	7.3	≝	225D
4.2	∨	2228	7.4	≙	2259
4.3	¬	00AC	7.5	≈	2248
4.4	⇒	21D2	7.6	≃	2243
4.5	⇔	21D4	7.7	~	223C
4.6	∀	2200	7.7	∝	221D
4.7	∃	2203	7.8	≅	2245
5.1	∈	2208	7.9	<	003C
5.2	∉	2209	7.10	>	003E
5.4	|	007C	7.11	≤	2264
5.5	|	007C	7.12	≥	2265
5.6	∅	2205	7.13	<<	226A
5.7	⊆	2286	7.14	>>	226B
5.8	⊂	2282	7.15	∞	221E
5.9	∪	222A	7.16	→	2192
5.10	∩	2229	7.17	∣	2223
5.11	⋃	22C3	7.18	≡	2261
5.12	⋂	22C2	7.19	⟨	27E8
5.13	∖	2216	7.19	⟩	27E9
5.13	∁	2201	8.1	‖	2225
5.16	×	00D7	8.2	⊥	27C2
5.17	Π	220F	8.3	∢	2222
6.1	N	2115	9.1	+	002B
6.2	Z	2124	9.2	–	2212
6.3	O	211A	9.3	±	00B1
6.4	R	211D	9.4	∓	2213
6.5	C	2102	9.5	·	22C5
6.6	P	2119	9.5	×	00D7
7.1	=	003D	9.6	/	002F
7.2	≠	2260	9.7	Σ	2211
7.3	:=	2254	9.8	Π	220F

Окончание таблицы А.1

Номер пункта настоящего стандарта	Символ	Шестнадцатеричный код символа (см. ИСО/МЭК 10646)	Номер пункта настоящего стандарта	Символ	Шестнадцатеричный код символа (см. ИСО/МЭК 10646)
9.10	√	221A	11.18	∫	222B
9.12	⟨	27E8	11.19	∬	222C
9.12	⟩	27E9	11.19	∮	222E
9.16	|	007C	11.19	∯	222F
9.17	⌊	230A	11.20	⨍	2A0D
9.17	⌋	230B	17.11	⋅	22C5
9.18	⌈	2308	17.12	×	00D7
9.18	⌉	2309	17.13	∇	2207
11.3	→	2192	17.17	∆	2206
11.4	↦	21A6	17.18	□	25A1
11.7	∘	2218	17.21	⊗	2297
11.11	∆	2206	18.1	ℱ	2131
11.12	′	2032	18.2	ℒ	2112
11.15	∂	2202	18.3	ℨ	2128
11.16	d	0064	18.6	∗	2217
11.17	δ	03B4			

Библиография

[1] ISO 80000-2:2009 Quantities and units. Part 2: Mathematical signs and symbols to be used in the natural sciences and technology

[2] ISO/IEC 10646:2003 Information technology — Universal Multiple-Octet Coded Character Set (UCS)[1)]

1) Заменен на ISO/IEC 10646:2011 Information technology — Universal Coded Character Set (UCS).

УДК 658.562.012.7:65.012.122:006.352 ОКС 03.120.30 Т59

Ключевые слова: математические символы и знаки, математическая логика, множества, стандартные множества чисел, интервалы, элементарная геометрия, операции, комбинаторика, функции, показательная и логарифмическая функции, тригонометрические и гиперболические функции, комплексные числа, матрицы, система координат, скаляры, векторы, тензоры, преобразования, специальные функции

Редактор *А. Д. Стулова*
Технический редактор *В. Н. Прусакова*
Корректор *Н. И. Гаврищук*
Компьютерная верстка *А. П. Финогеновой*

Сдано в набор 07.08.2012. Подписано в печать 13.12.2012. Формат $60\times84^{1}/_{8}$. Бумага офсетная. Гарнитура Ариал. Печать офсетная. Усл. печ. л. 4,18. Уч.-изд. л. 3,70. Тираж 126 экз. Зак. 1532.

ФГУП «СТАНДАРТИНФОРМ», 123995 Москва, Гранатный пер., 4.
www.gostinfo.ru info@gostinfo.ru
Набрано и отпечатано в Калужской типографии стандартов, 248021 Калуга, ул. Московская, 256.